~~676.~~ 確率論ヘノ積分方程式ノ應用
（M. Fréchet ノ論文紹介）

吉田　耕作（阪大）

空間 R ノ点 x ガ單位時間ノ後ニ y 点ニ移ル遷移確率密度ガ $K(x,y)$ デ與ヘラレ，一般ニ n 單位時間後ニ x 点ガ y 点ニ移ル遷移確率密度ガ

$$K^{(n)}(x,y)=\int_R K(x,z)K^{(n-1)}(z,y)\,dz$$
$$=\int_R K^{(n-1)}(x,z)K(z,y)\,dz$$

$$(K^{(1)}(x,y)\equiv K(x,y)\text{ トスル})$$

デ與ヘラレル如キ discrete ナ homogeneous stochastic process ニ於テ，$n\to\infty$ ナルトキノ $K^{(n)}(x,y)$ ノ狀態ヲ積分方程式論ノ方法デ調ベテミヨウト云フノデアル。

確率論ニ關スル Fréchet ノ論文ハ澤山アルケレドモ，上ノ問題ニツイテハ次ノ二ツガ重要ト思ハレル。Quaterly J. of Math. 5(1934), p. 106—144. Bull. Soc. Math. France 62(1934), p. 68—83.

定義カラ明ラカニ，全テノ n ニ對シテ

(1) $K^{(n)}(x,y)\geqq 0$,

(2) $\displaystyle\int_R K^{(n)}(x,y)\,dy\equiv 1.$

Fréchet ハ次ノ假定ノモトニ議論シテヰル。即チ

i) R ノ total measure mes(R) = 有限[1].

ii) $M = \underset{x,y \in R}{u.\,b.} |K(x,y)|$ = 有限.

ナニッテアル。之等ノ假定ヲ緩クスルコトハ望マシイケレドモ證明ノ方法上必要ラシイ。

§1. 準備

Fréchet ノ議論ノ根據ハ次ノ二ツノ Lemmas ニ要約サレル。

先ヅ $\left|K^{(n)}(x,y)\right| \leqq \int_R K(x,z)\left|K^{(n-1)}(z,y)\right| dz$

$$\leqq \int_R K(x,z)\, u.\,b. \left|K^{(n-1)}(x,y)\right| dz = u.\,b. \left|K^{(n-1)}(x,y)\right|$$

ダカラ induction ニヨッテ、全テノ n ニ對シテ

$$u.\,b. \left|K^{(n)}(x,y)\right| \leqq M. \tag{3}$$

核 $K(x,y)$ ノ resolvent $R(x,y,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K^{(n)}(x,y)$ ハ λ ノ有理型函數ニナルコトハ良ク知ラレテ居ル。實際[2]

$$\begin{cases} R(x,y,\lambda) = \dfrac{A_0(x,y) + A_1(x,y)\lambda + \cdots + A_n(x,y)\lambda^n + \cdots}{1 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n + \cdots} \\ A_p(x,y) - \dfrac{1}{\underline{|p}} \displaystyle\int K\begin{pmatrix} x, & s_1 & s_2 \cdots\cdots s_p \\ y & s_1 & s_2 \cdots\cdots s_p \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \cdots\cdots ds_p \\ a_p = \dfrac{1}{\underline{|p}} \displaystyle\int K\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \cdots\cdots s_p \\ s_1 & s_2 \cdots\cdots s_p \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \cdots\cdots ds_p \end{cases} \tag{4}$$

---

(1) 1 トシテモ一般性失ハヌカラ以下 1 トスル.

(2) E. Goursat: Cours d'analyse III, p.371.

コヽニ

$$K\begin{pmatrix} x & s_1 & \cdots & s_p \\ y & s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} K(x,y), & K(x,s_1), & \cdots, & K(x,s_p) \\ K(s_1,y), & K(s_1,s_1), & \cdots, & K(s_1,s_p) \\ \vdots & & & \\ K(s_p,y). & \cdots & & K(s_p,s_p) \end{Vmatrix}$$

デ與ヘラレ且ツ $\sum \lambda^p A_p(x,y)$, $\sum \lambda^p a_p$ 共ニ λ ノ整函數デアル。(1)

Lemma I. $\bar{R}(x,y,\lambda)$ ノ *pole* λ ハ全テ共ノ絶対値 1 ヨリ小ナラズ, 且ツ絶対値 1 ノ *pole* ハ全テ *simple pole* デアル。

證明: $\left|\bar{R}(x,y,\lambda)\right| \leqq \dfrac{M}{1-|\lambda|}$ *for* $|\lambda|<1$ *by* (3) ヨリ明カ。

Lemma 2. $\bar{R}(x,y,\lambda)$ ノ絶対値 1 ノ *pole* λ ハ $\lambda^N=1$ (N 正整數) ヲ滿足スル。

證明. 第一段. λ ガ *resolvent* ノ *pole* ト云フコトカラ同次積分方程式

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\mathcal{R}} K(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

ハ恒等的ニハ零デナイ積分可能ナ解 $\varphi(x)$ ヲ有スル。所ガ (3)

---

(1) $K(x,y)$ ガ (1), (2) ノ條件ヲ滿足スルト否トニ関ラズ。 $mes(\mathcal{R})$ ー有限, $u.b.|K(x,y)|$ ー有限トノ二ツノ假定丈カラ云ヘルコトデアル。

ト $|\lambda|=1$ ニヨリ

$$\left|\varphi(x)\right| \leqq \int_R K(x,y)\left|\varphi(y)\right|dy \leqq M\int_R \left|\varphi(y)\right|dy$$

従ッテ $u.b.\left|\varphi(x)\right| = Q =$ 有限トナル。$\left|\varphi(x)\right|$ ハ実際ニ上限 Q ヲ attain スルコトガ示セル。モット precise ニ $\left|\varphi(x)\right| = Q$ トナル如キ点集合ヲ $v_\omega = E(x, \left|\varphi(x)\right| = Q)$ トシタトキニ $mes(v_\omega) \geqq \frac{1}{M}$ ガ云ヘル。ソレニハ任意ノ $0<\varepsilon<Q$ ナル ε ヲ與ヘタトキ $v_\varepsilon = E(x, \left|\varphi(x)\right| \geqq Q-\varepsilon)$ ノ測度 $mes(v_\varepsilon) \geqq \frac{1}{Q}$ ガ云ヘルトヨイ。$v_\omega = \prod_\varepsilon v_\varepsilon$ ダカラ。

偖テ (1), (2), (3) ニヨリ

$$\left|\varphi(x)\right| \leqq \int_{v_\varepsilon} QK(x,y)\,dy + \int_{R-v_\varepsilon} (Q-\varepsilon)K(x,y)\,dy$$

$$= Q - \varepsilon \int_{R-v_\varepsilon} K(x,y)\,dy$$

ヲ得ル。所ガ Q ガ上限ダカラ任意ノ $\eta>0$ ニ對シテ $Q - \left|\varphi(x')\right| < \varepsilon\eta$ ナル如キ x' ガ存在スル。従ッテ $\int_{R-v_\varepsilon} K(x',y)\,dy < \eta$. 之レト (2) ト $M = u.b.\left|K(x,y)\right|$ トヲ組合セテ $1-\eta \leqq \int_{v_\varepsilon} M\,dy$。$\eta$ 任意ダッタカラ $mes(v_\varepsilon) \geqq \frac{1}{M}$.

第二段. x_0 ヲ v_ω ノ任意ノ点トスレバ, 之 x_0 ニ對シテ R ノ部分集合 $R_0(x_0)$ ガ定ッテ

$$\begin{cases} \varphi(x) \equiv \dfrac{\varphi(x_0)}{\lambda} & \text{for} \quad x \in R_0(x_0) \\ mes(R_0(x_0)) \geqq \dfrac{1}{M}. \end{cases}$$

$\varphi(x_0) = \lambda \int_R K(x_0, y) \varphi(y) dy$ 及ビ $\int_R K(x_0, y) dy = 1$ カラ

$$\int_R K(x_0, y) \left\{ 1 - \frac{\lambda \varphi(y)}{\varphi(x_0)} \right\} dy = 0$$

ヲ得ル。 $\lambda \varphi(y) / \varphi(x_0) = \alpha(y) + i\beta(y)$ ト置クト $|\varphi(x_0)| = Q$ カラ $\alpha^2(y) + \beta^2(y) \leqq 1$、故ニ $K(x_0, y) \geqq 0$, $1 - \alpha(y) \geqq 0$ カラ $K(x_0, y) > 0$ ナル如キ y ノ殆ンド到ル所デ $1 - \alpha(y) = 0$, 從ッテ $\beta(y) = 0$. 故ニ $\varphi(x) = \dfrac{\varphi(x_0)}{\lambda}$ ナル如キ x ノ点集合 $R_0(x_0)$ ハ確ニ $K(x_0, y) > 0$ ナル如キ y ノ集合ヲ含ム。(1)

$$1 = \int_R K(x_0, y) dy = \int_{K(x_0, y) > 0} K(x_0, y) dy \leqq M \int_{K(x_0, y) > 0} dy$$

ダカラ

$$mes(R_0(x_0)) \geqq \frac{1}{M}.$$

第三段. x_1 ヲ $R_0(x_0)$ ノ任意ノ点トスルト $|\lambda| = 1$ ニヨリ勿論 $|\varphi(x_1)| = Q$. 從ッテ上ト同ジク $R_1(x_1)$ 定リ

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{\varphi(x_1)}{\lambda} = \dfrac{\varphi(x_0)}{\lambda^2} & \text{for} \quad x \in R_1(x_1) \\ mes(R_1(x_1)) \geqq \dfrac{1}{M}. \end{cases}$$

---

(1) $mes\ 0$ ノ集合ヲ無視スレバ

以下同様ニシテ $R_2(x_2)$, $R_3(x_3)$, ...ガ定リ

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{\varphi(x_0)}{\lambda^{k+1}} & \text{for} \quad x \in R_k(x_k) \\ \operatorname{mes}(R_k(x_k)) \geqq \dfrac{1}{M}. \end{cases}$$

所ガ $\operatorname{mes}(R)=1$ ダカラ、$R_l(x_l)$ ト $R_m(x_m)$ トガ $(l \neq m)$ 共通点ヲモツ如キ l, m ガ存在シナケレバナラナイ。之共通点デハ $\varphi(x_0)/\lambda^{l+1} = \varphi(x_0)/\lambda^{m+1}$ トナルカラ $\varphi(x_0) \neq 0$ ニヨリ $\lambda^{|l-m|}=1$.　　　　—以上—

λ = ツイテノ有理型函数 $K(x, y, \lambda)$ ノ絶対値 1 ノ pole ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_s$ [1] 且ツ λ_i ＝於ケル principal part ヲ夫々

$$\frac{l_i(x, y)}{\lambda_i - \lambda}$$ (simple pole ナコトハ Lemma 1 ＝示シタ)

トスレバ, resolvent ＝関スル一般論カラ[2]

$$(5)\quad K(x, y) = \sum_{i=1}^{s} \frac{l_i(x, y)}{\lambda_i} + \varepsilon(x, y)$$

ト置クトキ

---

(1) 但シ $\lambda_1 = 1$ トスル。$\lambda = 1$ ガ pole ＝ナルコトハ $\varphi(x)=1$ ガ $\varphi(x) = \int_R K(x, y)\varphi(y)\,dy$ ノ解＝ナルコト ((2)式) カラワカル。

(2) Goursat: loc. cit. p. 402

$$
(6)\quad \begin{cases} \int_R l_i(x,z)\, l_i(z,y)\, dz = l_i(x,y) \\ \int_R l_i(x,z)\, l_j(z,y)\, dz \equiv 0\,, \qquad i \neq j \\ \int_R l_i(x,z)\, \mathcal{E}(z,y)\, dz = \int_R \mathcal{E}(x,z)\, l_i(z,y)\, dz \end{cases}
$$

ガ成立スル。且ツ $\mathcal{E}(x,y)$ ナル核ノ resolvent ノ poles ハ $K(x,y,\lambda)$ ノ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_s$ 以外ノ poles ト principal part ヲ含メテ一致スル。

Lemma 3. $\underset{x,y\in R}{\mathrm{u.b.}} |\mathcal{E}^{(n)}(x,y)| \leqq \dfrac{C}{(1+\delta)^{n-1}}$; $n=1,2,\cdots\cdots$

ナル如ト常數 C, $\delta>0$ ガ存在スル。

證明. $K(x,y)$ ト共ニ $|l_i(x,y)|$ ハ R デ有界ダカラ $\mathrm{u.b.}\,|\mathcal{E}(x,y)| = \mathcal{E} =$ 有限デアル。ヨッテ $\mathcal{E}(x,y)$ ノ resolvent ニ(4)式ヲ應用デキル。コノ resolvent ノ pole 全テ絶對値1ヨリ大ダカラ分母ノ絶對値ハ>常數>0 for $|\lambda| \leqq 1+2\delta$ ナル如キ $\delta>0$ 存在ス。分子ノ一般項 $\lambda^p A_p(x,y)$ ノ絶對値ハ此ノ場合，Hadamard ノ行列式ニ關スル定理ヲ用ヒ，全テノ $x,y\in R$ ニ對シ

$$
\frac{\mathcal{E}^{p+1}(p+1)^{\frac{p+1}{2}}|\lambda|^p}{\lfloor p}
$$

ヨリ小サイ。$\dfrac{1}{\lfloor p} < \dfrac{e^{p+1}}{(p+1)^{p+1}}$ ヲ用ヒテ之ノ p 乗根ハ

$p \to \infty$ ノトキ 0 ＝収斂スルコトガワカル。故ニ結局

$$\underset{\substack{|\lambda| \leqq 1+2\delta \\ x, y \in R}}{\mathrm{u.\,b.}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n-1} \varepsilon^{(n)}(x, y) \right| < C$$

ナル如キ常数 C ガ存在スルコトガワカル。ヨッテ Taylor 級数ノ良ク知ラレタ定理カラ求ムル結果ヲ得ル。

§2. 結　論

I. (5), (6) 及ビ Lemma 3 ＝ヨリ

$$(7) \begin{cases} K^{(n)}(x, y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{l_i(x, y)}{\lambda_i^n} + \varepsilon^{(n)}(x, y) \\[2ex] |\varepsilon^{(n)}(x, y)| \text{ ノ上限} \leqq \dfrac{C}{(1+\delta)^{n-1}} \end{cases}$$

之レハ Lemma 2 ＝ヨリ $K^{(n)}(x, y)$ ガ n ＝ツイテ asymptotic ＝ periodic ナコトヲ示ス。

II. $K^{(n)}(x, y)$ ガ $n \to \infty$ ノトキ，x, y ＝ツキ一様＝収斂スルタメノ必充條件ハ $R(x, y, \lambda)$ ノ絶對値 1 ノ pole ガ $\lambda = 1$ 以外＝存在シナイコトデアル。

證明．充分ナコトハ (7) 式ヨリ明ク．必要．若シ λ_2 キノ ($|\lambda_2| = 1$) ナル pole アレバ

$$\varphi(x) - \lambda_2 \int_R K(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

ヲ満足スル積分可能ナ $\varphi(x) \neq 0$ ガ存在スル。

Lemma 2 ト同様＝シテ $|\varphi(x)|$ ハ有界且ツ任意ノ n ＝対シテ

$$\varphi(x)=\lambda_2^{\,n}\int_R K^{(n)}(x,y)\,\varphi(y)\,dy.$$

ガ成立スルカラ $\lambda_2 \neq 1,\ |\lambda_2|=1$ デ $K^{(n)}(x,y)$ 一様収斂デハアリ得ナイ。

III. $K^{(m)}(x,y)$ ノ Césaro ノ平均値

$$\frac{K^{(\nu+1)}(x,y)+K^{(\nu+2)}(x,y)+\cdots\cdots+K^{(\nu+n)}(x,y)}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{s} l_i(x,y)\left[\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^{\nu+2+t}\right]+\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon^{(\nu+t)}(x,y)$$

$$\longrightarrow l_1(x,y) \quad (x,y,\nu\ ニツイテ一様ニ)$$

as $n\to\infty$.

IV. 上ノ極限遷移確率密度[1] $l_1(x,y)$ ガ x ニ depend シナイタメノ必充條件ハ，同次積分方程式

$$(8)\qquad \varphi(x)=\int_R K(x,y)\,\varphi(y)\,dy.$$

ノ一次独立ナ解ガ $\varphi\equiv 1$ 以外ニナイコトデアル。

證明. 必要. (8) カラ $\varphi(x)=\int K^{(n)}(x,y)\varphi(y)\,dy$ ヲ得ルカラ $\varphi(x)=\int l_1(x,y)\,\varphi(y)\,dy$，従ッテ $\varphi(x)$ ハ $l_1(x,y)$ ト共ニ x ニ independent.

充分. $\lambda=1$ ガ $k(x,y,\lambda)$ ノ simple pole ト云フコトカラ、積分方程式ノ一般論[2]ニヨリ

---

(1) Césaro ノ平均

(2) Goursat: loc. cit. p. 405

$$l_s(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x)\psi_i(y).$$

コヽニ φ_i, ψ_i ハ夫々

$$\varphi_i(x)=\int K(x,y)\varphi_i(y)\,dy,\quad \psi_i(x)=\int K(z,x)\psi_i(z)\,dz$$

ノ一次独立ナ solution ヲ表シテヰル。故ニ明カ。

V. $l_1(x,y)$ ガ y ニ depend シナイタメノ必充條件ハ

$$\int K(z,x)\,dz=1$$

且ツ $\psi(x)=\int K(z,x)\psi(z)\,dz$ ノ一次独立ナ解ガ $\psi\equiv 1$ 以外ニナイコトデアル。

証明. III ノ所論カラタヤスクワカル。シカモ III ト組合セテコノトキハ $l_1(x,y)\equiv \text{const.}$ ニナル。